Plan d'étude d'une fonction $y = f(x)$

1. Détermination du domaine de définiton de f et des domaines où f est continue, dérivable, de classe C^∞ par application des théorèmes généraux sur les fonctions continues, dérivables, de classe C^∞.

2. Restriction éventuelle du domaine d'étude de f : par des considérations de périododocité et de symétries (ex. : (im)parité, $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \pm f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, ...).
À chaque étape, préciser la nouvelle restriction apportée ainsi que le moyen d'obtenir la courbe sur l'ancien domaine à partir de son tracé sur sa seule restriction.

3. Étude aux bornes du domaine d'étude :
   - On ne détaille que le calcul des limites mettant en jeu une forme indéterminée qui ne figure pas parmi les limites à connaître. On pensera à utiliser des équivalents et des développementes limités !
   - Étude des branches infinies :
     - ⋆ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$ $\dashrightarrow$ asymptote horizontale d'équation $y = b$,
     - ⋆ si $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$ $\dashrightarrow$ asymptote verticale d'équation $x = a$,
     - ⋆ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, *on étudie le rapport* $\dfrac{f(x)}{x}$ *:*
       - (a) si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\dashrightarrow$ BPOx [1] (ex. : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$),
       - (b) si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $\dashrightarrow$ BPOy [2] (ex. : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au voisinage de $+\infty$),
       - (c) si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$ $\dashrightarrow$ DA [3] d'équation $y = ax$, *on étudie la quantité* $f(x) - ax$ *:*
         - ◦ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ $\dashrightarrow$ BP [4] de direction $y = ax$,
         - ◦ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$, $b \in \mathbb{R}$ $\dashrightarrow$ asymptote (oblique) d'équation $y = ax + b$, *on cherche alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote :*
           - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0^+$ $\dashrightarrow$ la courbe est au-dessus de l'asymptote,
           - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0^-$ $\dashrightarrow$ la courbe est en dessous de l'asymptote.
   - Étude des points d'arrêts : prolongements par continuité éventuels, dérivabilité éventuelle en un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas : étude de $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou théorème de passage à la limite sur la dérivée.

4. Calcul de la dérivée f' et tableau de variation.

5. Tracé de la courbe, en plaçant les asymptotes éventuelles et les tangentes aux points remarquables.

6. Si la fonction f n'est pas trop moche, on peut vérifier la courbe tracée avec sa calculatrice.

---

1. Branche parabolique de direction Ox
2. Branche parabolique de direction Oy
3. Direction asymptotique
4. Branche parabolique