I- Limites de suites et de fonctions

1. Suites de références

- Une suite converge vers un réel.
- Une suite diverge vers $\pm\infty$.
- Les suites $\sqrt{n}$, n, n^2, … divergent vers $+\infty$.
- Les suites $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, … convergent vers 0.
- Soit q un nombre réel :
  - si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$,
  - si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$,
  - si $q \leq -1$, il n'y a pas de limite.

2. Théorème d'encadrement

Soient f, g et h trois fonctions, et l un nombre réel. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ et si pour tout x on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$.

3. Composition

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$,
alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

II- Dérivabilité

1. Fonctions de références

fonction	dérivée
k	0
x	1
kx	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

2. Fonctions composées

fonction	dérivée
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(x)$
$\sin(u)$	$u'\cos(x)$
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$

III- Suite et récurrence

1. Principe de récurrence

Soient $P(n)$ une propriété indéxée par l'entier naturel n, et m un entier. Si $P(m)$ est vraie (initialisation), et si pour tout entier naturel n tel que $n \geq m$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (hérédité), alors $P(n)$ est vrai pour tout en entier $n \geq m$ (conclusion).

2. Généralités sur les suites

a) Sens de variation

On dit qu'une suite (u_n) est :
- croissante, si $u_n \leq u_{n+1}$,
- décroissante, si $u_n \geq u_{n+1}$,
- constante, si $u_n = u_{n+1}$.

b) Suite bornée

On dit qu'une suite (u_n) est :
- majorée, s'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n$, $u_n \leq M$,
- minorée, s'il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n$, $u_n \geq m$,
- bornée, s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$, tels que pour tout n, $m \leq u_n \leq M$.

3. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite est arithmétique s'il existe un réel a, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a + u_n$.

a) Propriétés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_0 + na$, et par décalage d'indice : $u_n = u_p + (n-p)a$.

b) Somme de termes consécutifs

$$\begin{aligned} S_n &= u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} = \sum_{k=p}^{p+n} u_k \\ &= (n+1) \cdot \frac{u_p + u_{n+p}}{2} \\ &= \text{nb de termes} \cdot \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \end{aligned}$$

4. Suites géométriques

On dit qu'une suite est géométrique s'il existe un réel q non nul, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

a) Propriétés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_0 \cdot q^n$, et par décalage d'indice : $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

b) Somme de termes consécutifs

$$\begin{aligned} S_n &= u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} = \sum_{k=p}^{p+n} u_k \\ &= u_p \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ &= \text{premier terme} \cdot \frac{\text{raison}^{\text{nb de termes}} - 1}{\text{raison} - 1} \end{aligned}$$

5. Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- la limite de leur différence est nulle.

Théorème des suites adjacentes Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes, telles que (u_n) soit croissante et (v_n) décroissante. Alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l, et de plus $(u_n) \leq l \leq (v_n)$.

6. Théorème des suites monotones

- Toute suite croissante et majorée par M est convergente vers l, qui vérifie $l \leq M$.
- Toute suite décroissante et minorée par m et convergente vers l, qui vérifie $l \geq m$.