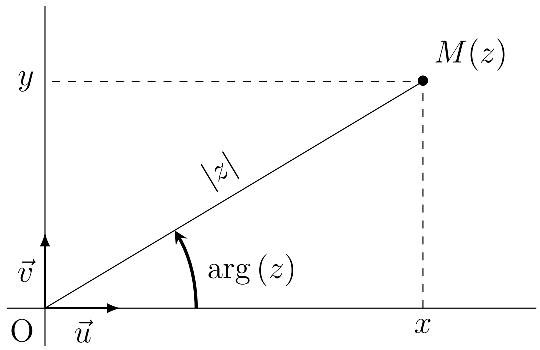
I- Nombres complexes

Dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z.



– z a pour forme algébrique : $z = x + \mathrm{i}y$
– partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$
– partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$
– le conjugué de z est : $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$
– le module de z est : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Pour $z \neq 0$, en notant $\theta = \arg z$ son argument :
– z a pour forme trigonométrique :
$z = |z| (\cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta)$
– z a pour forme exponentielle :
$z = |z| \,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Propriétés des conjugués pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$
– $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
– $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
– $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Propriétés des modules pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$
– $z\bar{z} = |z|^2$
– $|z| = |\bar{z}|$
– pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
– $|zz'| = |z|\,|z'|$
– $|z^n| = |z|^n$
– $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
– Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et la distance $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$
– $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
– $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
– $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
– $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
– $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
– $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ colinéaires $\iff \dfrac{d - c}{b - a} \in \mathbb{R}$
– $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ perpendiculaires $\iff \dfrac{d - c}{b - a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

II- Équations du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ admet :

⋆ si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

⋆ si $\Delta = 0$, une solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

⋆ si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

– si $\Delta \neq 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
– si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$
– $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$
– $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

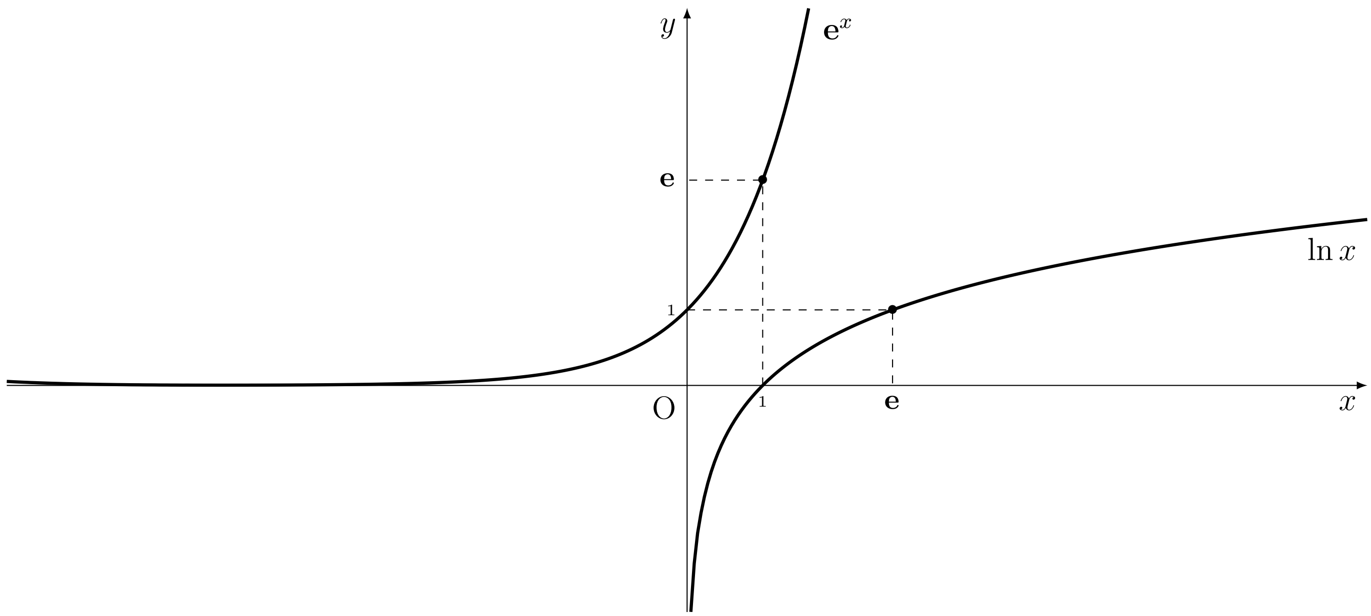
Si on résout l'équation (E) dans $\mathbb{R}$, elle admet des solutions (réelles) uniquement si $\Delta \geq 0$.

III- Équations différentielles

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$.

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$ sont les fonctions f définies dans $\mathbb{R}$ de la forme : $f(x) = k\mathbf{e}^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions f définies dans $\mathbb{R}$ de la forme : $f(x) = k\mathbf{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

IV- Fonctions usuelles



1. Fonction exponentielle

La fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, est appelée la fonction exponentielle.
Elle est notée : $\exp(x) = \mathbf{e}^x$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Pour tous réels x et y,

- $\mathbf{e}^0 = 1$ et $\mathbf{e}^x > 0$
- $\mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x \cdot \mathbf{e}^y$
- $\mathbf{e}^{x-y} = \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$
- $(\mathbf{e}^x)^y = \mathbf{e}^{xy}$

Limites et croissances comparées pour $n \in \mathbb{N}^*$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n \mathbf{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty$

2. Fonction logarithme

La primitive sur $]0; +\infty[$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, est appelée la fonction logarithme.
Elle est notée : $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$, pour $x > 0$.

Pour tous réels $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{Q}$,

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathbf{e}^1) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$

Limites et croissances comparées pour $n \in \mathbb{N}^*$

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$